# PEMECAHAN MASALAH SYARAT BATAS DUA TITIK
## *SOLVABILITY OF TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS*

**Ahmad Thalib[1] and Bambang Soedijono [2]**
***Program Studi Matematika***
***Program Pascasarjana UGM***

## ABSTRACT

The boundary value problems can solve various complicated problems. If mathematical model assumes on theoretical frame work and ability to communicate model, so the boundary value problems operate based on the concept and potency of differential equations related to the various boundary, simulation and estimation for optimizing that condition in industrial sector and economy development.

Various industries can be represented, engineered or solved through differential equations, for example automotive industry and others physical phenomena. In this case boundary value problems are very important for science and technology, particulary on construction and engineering, beside application on biology, chemistry, ecology and social sciences. Such advance, can only be achieved by having a **research on the basic science**, one branch of mathematics which is very important to be developed is boundary value problems.

In this paper is discussed the existence of solution of two point boundary value problems for second order differential equations of the form :

$x'' = f(t,x,x')$, $t \in [0,1]$, where $f:[0,1]\times \Re^2 \longrightarrow \Re$ is continuous, and $x(t)$ satisfies the boundary conditions to connected of two points :

$$x(0)=A, \quad x'(1)=B \, ; \qquad (M_1)$$
$$x'(0)=A, \quad x(1)=B \, ; \qquad (M_2)$$

The existence of solution depends on assumptions Barrier strips. This assumptions formulates that: "There are pairs (two or four) of suitable constants such that f(t,x,p) does not change its sign on sets of the form $[0,1]\times[-M,M]\times P$, where M is a nonnegative constant, and P is a closed interval bounded by some pairs of constants, mentioned above." If the assumptions are satisfied, then there are Barrier strips for x'(t) on [0,1]. Moreover, the assumptions are sufficient conditions to obtain a priori bounds for x(t), x'(t) and x"(t). The method in this work

1. FPMIPA IKIP Ujungpandang
2. Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

used on the idea topological transversality theorem and a priori bounds on solutions.

Key Words : Topological transversality theorem, Priori bounds, Barrier strips.

**PENGANTAR**

Berbagai fenomena alam dapat direpresentasikan, direkayasa, dan dipecahkan dengan persamaan diferensial, misalnya laju perubahan, lintasan arus listrik, dan fenomena fisik lainnya. Kenyataan yang demikian itu menyebabkan masalah syarat batas merupakan sesuatu yang penting untuk beberapa bidang sains dan teknologi, terutama sekali dalam bidang fisika dan rekayasa di samping aplikasinya dalam bidang biologi, kimia, ekologi, dan ekonomi.

Masalah syarat batas, atau lebih luas model matematika, telah dikenal sangat handal dalam memecahkan berbagai macam persoalan keilmuan yang rumit secara teori. Jika model matematik berpijak pada kerangka teoritis dan kemampuan merumuskan model, maka masalah syarat batas bekerja di atas kekokohan konsep dan potensi besar persamaan diferensial dalam kaitannya dengan elastisitas batas-batas yang mungkin, yang dengan berbagai simulasi memiliki kemampuan dan daya estimasi untuk mengoptimalkan kondisi-kondisi yang diinginkan dalam berbagai bidang, di antaranya bidang pengembangan ekonomi.

Mengingat banyaknya persoalan yang dapat disajikan dan ditafsirkan dengan persamaan diferensial, maka pengembangan materinya sangat diperlukan. Perkembangan materi masalah syarat batas sejalan dengan perkembangan dan perluasan materi matematika. Dalam matematika modern dengan topik-topik yang amat luas, persamaan diferensial mempunyai peranan yang penting. Salah satu teori yang sangat penting dan menarik untuk penelitian dalam pengembangan materi persamaan diferensial, adalah masalah syarat batas dua titik.

Masalah syarat batas dua titik yang akan dibahas adalah persamaan differensial orde dua berbentuk :

$$x'' = f(t,x,x'), \quad t \in [0,1],$$

$$f : [0,1] \times \Re^2 \longrightarrow \Re \text{ adalah kontinu}$$

dengan x(t) memenuhi syarat batas yang terkait dengan dua titik :

$$x(0)=A, \quad x'(1)=B \; ; \qquad (M_1)$$

$$x'(0)=A, \quad x(1)=B \; ; \qquad (M_2)$$

Masalah syarat batas ($M_1$) dan ($M_2$) menghasilkan eksistensi syarat perlu dan syarat cukup eksistensi solusi, namun secara umum tidak mudah menerapkannya, sehingga harus dipikirkan untuk menguji dan menunjukkan dengan teorema eksistensi.

Banyak pakar matematika yang mengadakan penelitian tentang pemecahan masalah syarat batas dua titik. Wang (1995) membahas tentang pemecahan masalah syarat batas dua titik singular nonlinear. Sebelumnya (1994), ia telah menunjukkan tentang solusi positif masalah syarat batas dua titik singular nonlinear. Masalah syarat batas dua titik ini juga dapat dikerjakan dalam berbagai kondisi yang memenuhi syarat perlu dan syarat cukup tertentu,dan di antaranya Thompson (1994) menjelaskan lebih aplikatif mengenai eksistensi masalah syarat batas dua titik pada Elektrodifusi dua ion.

Selanjutnya Kelevedjiev (1994) dalam penelitiannya membahas eksistensi solusi masalah syarat batas dua titik, dan dalam paper yang berbeda secara khusus juga menjelaskan tentang noneksistensi solusi masalah syarat batas dua titik.

Berkaitan dengan hal di atas, Kelevedjiev (1994) berhasil menyusun suatu asumsi dan menyatakan bahwa untuk masalah ($M_1$) dan ($M_2$) akan ditunjukkan eksistensi masalah syarat batas yang bergantung pada asumsi yang diambil.

Strips P yang didefinisikan oleh asumsi itu, mengontrol kelakuan x'(t) pada [0,1]. Hal itu tergantung pada tanda f(t,x,p), yang kurva x'(t) nya pada [0,1] melintasi tak lebih satu kali. Oleh karena itu, jika asumsi dipenuhi, maka dapat dikatakan terdapat barrier strips untuk x'(t) pada [0,1]. Selain itu, asumsi ini merupakan syarat cukup untuk memperoleh batas-batas priori untuk x(t), x'(t), dan x"(t).

Bila didefinisikan persamaan differensial x"=f(t,x,x') dengan fungsi f kontinu pada region D dalam ruang $\Re^3$, maka masalah syarat batas dua titik yang terkait dengan persamaan differensial x"=f(t,x,x') menentukan solusi x=x(t) yang di definisikan pada selang [0,1] yang memuat titik $t_1$ dan $t_2$, sehingga dipenuhi syarat batas $x(t_1)=x_1$ dan $x(t_2)=x_2$.

**TEOREMA EKSISTENSI**

Akan diperlihatkan eksistensi solusi masalah syarat batas untuk persamaan diferensial orde dua yang berbentuk :

$x'' = f(t,x,x'), \qquad t \in [0,1]$,

$f : [0,1] \times \Re^2 \longrightarrow \Re$ adalah kontinu

dengan x(t) memenuhi suatu syarat batas dua titik ($M_1$) dan ($M_2$).

Untuk menunjukkan eksistensi suatu solusi, digunakan tehnik inisiasi (technique initiated). Metode ini dikerjakan dengan mengandalkan Teorema transversal topologi (topological transversality theorem) dan suatu Batas priori pada solusi (a priori bound on solution). Lebih lanjut eksistensi masalah syarat batas ini, bergantung pada suatu asumsi yang disebut asumsi Barrier strips.

**Teorema Eksistensi Umum**

Guna memperkuat pembahasan teorema-teorema pada sub-bab berikutnya, maka akan dituliskan teorema eksistensi umum (*a general existence theorem*). Apabila pada ruang C[0,1], himpunan semua fungsi kontinu x(t) pada [0,1], dilengkapi dengan norma :

$$|x|_0 = \sup\{|x(t)| : 0 \le t \le 1\}$$

maka C[0,1] merupakan suatu ruang Banach. Demikian pula $C^k[0,1]$ $k \geq 0$, himpunan semua fungsi x(t) sehingga $x^{(k)}$ kontinu pada [0,1], merupakan ruang Banach terhadap norma :

$$|x|_k = \max\{|x|_0, |x'|_0, \ldots, |x^{(k)}|_0\}.$$

Didefinisikan $\beta$ sebagai himpunan semua fungsi yang memenuhi syarat batas linear inhomogen

$$a_{i1}x(0)+a_{i2}x'(0)+b_{i1}x(1)+b_{i2}x'(1)=\tau_i,\ i=1,2,$$

dengan $a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}$, dan $\tau_i$ konstanta-konstanta yang diketahui, dan $\beta_0$ adalah himpunan fungsi-fungsi yang memenuhi syarat batas homogen

$$a_{i1}x(0)+a_{i2}x'(0)+b_{i1}x(1)+b_{i2}x'(1)=0,\ i=1,2.$$

Selanjutnya, $C^k_\beta([0,1])$ himpunan fungsi-fungsi $C^k[0,1]$ yang memenuhi syarat batas $\beta$. Diambil fungsi b(t) dan c(t) kontinu pada [0,1], dan pada interval $C^2([0,1])$ didefinisikan $Lx=x''+b(t)x'+c(t)x$ sebagai operator persamaan differensial linear orde dua.

**Teorema**

Diketahui $f:[0,1]\times \Re^2 \longrightarrow \Re$ adalah kontinu,

$L : C^2_{\beta_0}([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ adalah satu-satu. Jika terdapat suatu konstanta $M<\infty$ sehingga $|x|_2 < M$ untuk setiap x(t) solusi masalah syarat batas

$$Lx=\lambda f(t,x,x'),\quad 0\le t\le 1,\quad x(t)\in\beta,\quad \lambda\in[0,1],$$

maka masalah syarat batas

$$Lx=f(t,x,x'),\quad 0\le t\le 1,\quad x(t)\in\beta,$$

mempunyai paling sedikit satu solusi pada $C^2_\beta([0,1])$.

**Bukti :**

Didefinisikan $N: C_\beta^2 \longrightarrow C$ dengan $Nx \equiv x''+b(t)x'+c(t)x$, dan operator $N^{-1}: C \longrightarrow C_\beta^2$ terjamin ada dan didefinisikan dengan $N^{-1}h=L^{-1}h+l$ , $l$ adalah solusi $Lx=0$, $x \in \beta$. Jelas bahwa N satu-satu sebab L ada dan satu-satu dengan $L^{-1}h+l$ adalah invers N yang ditentukan oleh keberadaan $l$.

Misalkan $u_1$ dan $u_2$ adalah solusi-solusi yang bebas linear untuk $x''+b(t)x'+c(t)x=0$, sehingga $x=c_1u_1+c_2u_2$ adalah solusi umum. Karena $Lx=0$, $x \in \beta_0$ hanya mempunyai solusi trivial, dengan syarat $\det[\tau_i(u_j)] \neq 0$.

Selanjutnya, penyelesaian $Lx=0$, $x \in \beta$, diperoleh dengan menentukan konstanta-konstanta $c_1$ dan $c_2$ , sehingga

$$c_1 \tau_i(u_1)+c_2 \tau_i(u_2)=r_i, \quad i=1,2.$$

Karena determinan sistem persamaan ini tidak nol, maka terdapat solusi tunggal, katakan konstanta $k_1$ dan $k_2$, sehingga $l=k_1u_1+k_2u_2$ yang memenuhi $Ll=0$, $l \in \beta$.

Selanjutnya didefinisikan

$$U=\{x \in C_\beta^2 : |x|_2 < M + |l|_2\}.$$

yang merupakan himpunan terbuka relatif di dalam himpunan konvex $C_\beta^2$ pada ruang Banach $C^2$. Misalkan $H : \bar{U} \times [0,1] \longrightarrow C_\beta^2$, $H(u,\lambda)=\lambda N^{-1}Fj(u)+(1-\lambda)l$ dengan $\lambda \in [0,1]$ dan pemetaan $j: C_\beta^2 \longrightarrow C^1$ kontinu lengkap serta $F:C^1 \longrightarrow C$ merupakan pemetaan kontinu yang didefinisikan dengan $(Fv)(t)=f(t,v(t),v'(t))$, homotopy ini kompak. Selanjutnya, $H(u,\lambda)=u$ berarti

$$\lambda N^{-1}Fj(u)+(1-\lambda)l=u$$

$$\lambda (L^{-1}Fj(u)+l)+(1-\lambda)l=u$$

$$\lambda (L^{-1}Fj(u))+\lambda l+l-\lambda l=u$$

$$\lambda (L^{-1}Fj(u))+l=u$$

$\lambda$ L($L^{-1}$Fj(u))+L*l* =Lu

karena L*l*=0, diperoleh

$\lambda$ Fj(u)=Lu.

Karena L*l*=0, dan setiap titik tetap pada H memenuhi $|u|_2 < M$ untuk konstanta M<$\infty$ dengan $H_\lambda$(u)=H(u,$\lambda$) adalah dalam $K_{\partial U}(\overline{U}, C_\beta^2)$; ini berarti bahwa *l* adalah titik dalam U pada $C_\beta^2$, sehingga $l \equiv H_0$ adalah essensial. Selanjutnya berdasarkan suatu teorema, $H_1$ juga essensial, Karena $H_1$ essensial, maka $H_1$ mempunyai titik tetap yang merupakan penyelesaian x" = f(t,x,x'), x$\in \beta$. Disimpulkan bahwa masalah syarat batas Lx=f(t,x,x'), $0 \le t \le 1$, x(t)$\in \beta$, mempunyai paling sedikit satu solusi pada $C_\beta^2$([0,1]). ■

**Asumsi Barrier Strips**

Dalam sub-bab ini diberikan asumsi-asumsi yang diperlukan pada teorema eksitensi solusi. Pada masalah syarat batas ($M_1$) dan ($M_2$) akan ditunjukkan bahwa eksistensi masalah syarat batas bergantung pada asumsi bentuk itu, dan asumsinya adalah :

Terdapat beberapa pasang (dua atau empat) konstanta-konstanta yang bersesuaian sehingga f(t,x,p) tak berubah tandanya pada himpunan yang berbentuk $[0,1]\times[-M,M]\times P$ dengan M adalah suatu konstanta nonnegatif, dan P adalah interval tertutup yang dibatasi oleh pasangan konstanta yang disebutkan di atas.

Strips P yang didefinisikan oleh asumsi di atas, mengontrol kelakuan x'(t) pada [0,1]. Hal itu tergantung pada tanda f(t,x,p), dan kurva x'(t) pada [0,1] melintasinya tak lebih satu kali.

**Teorema-teorema Eksistensi**

**Teorema**

Misalkan $f:[0,1]\times \Re^2 \longrightarrow \Re$ kontinu. Jika diberikan konstanta $L_i$, i=1,4, sehingga $L_2>L_1\ge B$, $L_3<L_4\le B$

$$f(t,x,p)\ge 0 \text{ untuk } (t,x,p)\in[0,1]\times \Re \times [L_1,L_2]$$

dan

$$f(t,x,p)\le 0 \text{ untuk } (t,x,p)\in[0,1]\times \Re \times [L_3,L_4]$$

maka masalah ($M_1$) mempunyai paling sedikit satu penyelesaian pada $C^2$([0,1]).

**Bukti :**

Ditinjau keluarga masalah

$$x''=\lambda f(t,x,x'),\ t\in[0,1],\ \lambda\in[0,1],\ (M_1)_\lambda$$
$$x(0)=A,\quad x'(1)=B.$$

Operator Lx=x" adalah satu-satu, kelakuan dalam interval $C^2_{\beta_0}([0,1])$ dan dengan nilai-nilai dalam ruang C([0,1]). Akibatnya $(M_1)$ mempunyai suatu solusi pada $C^2([0,1])$ bila untuk sembarang solusi masalah syarat batas $(M_1)_\lambda$, $x(t)\in C^2[0,1]$ merupakan batas priori sebagaimana dimaksud pada Teorema eksistensi umum dipenuhi.

Pertama-tama diestimasi x'. Pandang himpunan-himpunan $S_0=\{t\in[0,1]: L_1< x'(t)\le L_2\}$ dan $S_1=\{t\in[0,1]: L_3\le x'(t)<L_4\}$ tidak kosong.

Misalkan $t_0\in S_0$ dan $t_1\in S_1$ tertentu. Andaikan terdapat $t_0'\in(t_0,1]$ dan $t_1'\in(t_1,1]$ sehingga

$$x'(t_0')< x'(t_0) \text{ dan } x'(t_1')> x'(t_1). \tag{1}$$

Sifat kontinu x'(t) memungkinkan untuk mengambil $t_0'$ dan $t_1'$ yang bersesuaian dengan $(t_0,1]\cap S_0$ dan $(t_1,1]\cap S_1$, tetapi $x''=\lambda f(t,x,x')\ge 0$ untuk $t\in S_0$ dan $x''=\lambda f(t,x,x')\le 0$ untuk $t\in S_1$, sehingga

$$x'(t_0')\ge x'(t_0) \text{ dan } x'(t_1')\le x'(t_1).$$

Hal ini kontradiksi dengan (1), dan juga terjadi $x'(t)\ge x'(t_0)$ untuk $t\in(t_0,1]$, dan $x'(t)\le x'(t_1)$ untuk $t\in(t_1,1]$ dan khususnya $x'(1)\ge x'(t_0)>L_1\ge B$, $x'(1)\le x'(t_1)<L_4\le B$. Kontradiksi yang diperoleh menunjukkan bahwa $S_0$ dan $S_1$ adalah kosong, jadi diperoleh $S_0^c=\{t\in[0,1]: L_2< x'(t)\}\cup\{t\in[0,1]: L_1\ge x'(t)\}$ dan $S_1^c=\{t\in[0,1]: L_3> x'(t)\}\cup\{t\in[0,1]: L_4\le x'(t)\}$. Karena $x'(t)\in C[0,1]$ dan $L_4\le x'(t)\le L_1$ ( $S_0^c\cap S_1^c$) untuk $t\in[0,1]$, maka

$$|x'(t)|\le\max\{|L_1|,|L_4|\} \quad \text{untuk } t\in[0,1]$$

dengan Teorema Nilai Rata-rata, untuk setiap $t\in(0,1]$ terdapat $d\in(0,t]$ sehingga

$$x(t)-x(0) = x'(d)t$$
$$x(t)=x(0)+x'(d)t$$
$$|x(t)|\le|A|+|x'(d)t|\le|A|+\max\{|L_1|,|L_4|\}$$

selanjutnya diperoleh

$$|x(t)|\le c_1 \quad \text{untuk } t\in[0,1], \text{ dengan}$$
$$c_1=|A|+c,\ \text{dan } c=\max\{|L_1|,|L_4|\}.$$

Akibatnya, persamaan differensial dalam $(M_1)_\lambda$ bersama-sama dengan estimasi priori dari x dan x' yang terbatas dan kontinu memperlihatkan bahwa

$$|x''(t)| \le c_2, \quad t \in [0,1]$$

untuk suatu konstanta $c_2 < \infty$ tidak tergantung pada $\lambda$. Selanjutnya diperoleh setiap solusi masalah syarat batas $(M_1)_\lambda$, x(t) memenuhi

$$|x(t)|_2 < \max\{c, c_1, c_2\} + 1 \quad \text{untuk} \quad t \in [0,1],$$

dan disimpulkan bahwa masalah syarat batas $(M_1)$ mempunyai paling sedikit satu solusi pada $C^2([0,1]$. ■

**Teorema**

Misalkan $f : [0,1] \times \Re^2 \longrightarrow \Re$ adalah kontinu. Jika terdapat lebih dari satu konstanta $L_i$, i=1,4, sehingga $L_2 > L_1 \ge A$, $L_3 < L_4 \le A$

$$f(t,x,p) \le 0 \quad \text{untuk } (t,x,p) \in [0,1] \times \Re \times [L_1, L_2]$$

dan

$$f(t,x,p) \ge 0 \quad \text{untuk } (t,x,p) \in [0,1] \times \Re \times [L_3, L_4]$$

maka masalah syarat batas $(M_2)$ mempunyai paling sedikit satu solusi pada $C^2([0,1])$.

**Bukti :**

Diselidiki keluarga masalah

$$x'' = \lambda f(t,x,x'), \quad t \in [0,1], \ \lambda \in [0,1], \ (M_2)_\lambda$$

$$x'(0) = A, \quad x(1) = B.$$

Misalkan operator $Lx = x''$ adalah satu-satu, kelakuan dalam interval $C^2_{\beta_0}[0,1]$ dan dengan nilai-nilai dalam ruang C[0,1]. Akibatnya $(M_2)$ mempunyai suatu solusi pada $C^2[0,1]$ bila untuk sebarang solusi masalah syarat batas $(M_2)_\lambda$, $x(t) \in C^2[0,1]$ merupakan batas priori sebagaimana dimaksud Teorema dipenuhi.

Pertama-tama diestimasi x'. Pandang himpunan-himpunan $S_0 = \{t \in [0,1] : L_1 < x'(t) \le L_2\}$ dan $S_1 = \{t \in [0,1] : L_3 \le x'(t) < L_4\}$ adalah tidak kosong.

Misalkan $t_0 \in S_0$ dan $t_1 \in S_1$ tertentu. Andaikan terdapat $t_0' \in [0, t_0)$ dan $t_1' \in [0, t_1)$ sehingga

$$x'(t_0') > x'(t_0) \ \text{dan} \ x'(t_1') < x'(t_1). \qquad (2)$$

Sifat kontinu x'(t) memungkinkan untuk mengambil $t_0'$ dan $t_1'$ yang bersesuaian dengan $[0,t_0) \cap S_0$ dan $[0,t_1) \cap S_1$, tetapi $x'' = \lambda f(t,x,x') \ge 0$ untuk $t \in S_0$ dan $x'' = \lambda f(t,x,x') \le 0$ untuk $t \in S_1$, akibatnya

$$x'(t_0') \le x'(t_0) \ \text{dan} \ x'(t_1') \ge x'(t_1).$$

Hal ini kontradiksi dengan (2) dan juga karena $x'(t) \le x'(t_0)$ untuk $t \in [0,t_0)$. dan $x'(t) \ge x'(t_1)$ untuk $t \in [0,t_1)$ dan khususnya $x'(0) \le x'(t_0) < L_4 \le A$, $x'(0) \ge x'(t_1) > L_1 \ge A$. Kontradiksi yang diperoleh menunjukkan bahwa $S_0$ dan $S_1$ adalah kosong, jadi diperoleh $S_0^c = \{t \in [0,1] : L_2 < x'(t)\} \cup \{t \in [0,1] : L_1 \ge x'(t)\}$ dan $S_1^c = \{t \in [0,1]$:

$L_3 > x'(t)\} \cup \{t \in [0,1]: \; L_4 \le x'(t)\}$ . Karena $x'(t) \in C[0,1]$ dan $L_4 \le x'(t) \le L_1$ ( $S_0^c \cap S_1^c$) untuk $t \in [0,1]$, maka

$$|x'(t)| \le \max\{|L_1|, |L_4|\} \quad \text{untuk } t \in [0,1]$$

dengan Teorema Nilai Rata-rata, untuk setiap $t \in [0,1)$ terdapat $d \in [t,1)$ sehingga

$$x(1)-x(t) = x'(d)(1-t)$$
$$x(t)-x(1) = x'(d)(t-1)$$

selanjutnya diperoleh

$$|x(t)| \le c_1 \quad \text{untuk } t \in [0,1], \text{ dengan}$$
$$c_1 = |B| + c, \text{ dan } c = \max\{|L_1|, |L_4|\}.$$

Akibatnya persamaan differensial dalam $(M_2)_\lambda$ bersama-sama dengan estimasi priori dari x dan x' yang terbatas dan kontinu, sehingga diperoleh

$$|x''(t)| \le c_2, \quad t \in [0,1]$$

untuk suatu konstanta $c_2 < \infty$ tidak bergantung pada $\lambda$. Selanjutnya diperoleh setiap solusi masalah syarat batas $(M_2)_\lambda$, x(t) memenuhi

$$|x|_2 < \max\{c, c_1, c_2\} + 1 \quad \text{untuk } t \in [0,1].$$

Hal ini berarti masalah syarat batas ($M_2$) mempunyai paling sedikit satu solusi pada $C^2[0,1]$. ■

**Contoh-contoh Aplikasi**

**Contoh (Mixed)**

$x'' = P_m(x')$, $t \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x(0)=A$, $x'(1)=B$. Jika polinomial $P_m(p)$ mempunyai suatu bentuk sederhana (simple zero) yang lebih besar dan suatu bentuk sederhana yang lebih kecil daripada B, maka masalah yang dibahas benar-benar dapat dipecahkan dalam $C^2([0,1])$.

## KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa terdapat penyelesaian masalah syarat batas dua titik ($M_1$) dan ($M_2$). Eksistensi penyelesaian masalah syarat batas ini bergantung pada asumsi *barrier strips* dan dijamin oleh suatu teorema, yang bukti teorema itu dikerjakan dengan menggunakan teknik inisiasi, yakni suatu metode yang mengandalkan ide teorema transversal topologi dan suatu batas priori pada solusi. Dalam penelitian ini hanya dibicarakan masalah syarat batas persamaan diferensial orde dua, dengan syarat batas dua titik.

Penelitian lebih lanjut mengenai masalah syarat batas dapat dilakukan untuk berbagai persamaan diferensial orde tinggi dengan syarat batas multi titik.

## DAFTAR PUSTAKA

Kelevedjiev, P., 1994 a, Existence of Solution for Two-Point Boundary Value Problems, *Nonlinear Analysis*, 22 : 217-224.

Kelevedjiev, P., 1994 b, Nonexistence of Solution for Two-Point Boundary Value Problems, *Nonlinear Analysis*, 22 : 225-228.

Thompson, H.B., 1994, Existence for Two-Point Boundary Value Problems in Two Ion Electrodiffusion, *J. Math. Anal. Appl.*, 184: 82-94.

Wang J., 1995, Solvability of Singular Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 24: 555-561.

Wang J., 1994, On Positive of Singular Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems, *J. Differential Equations*, 107: 163-174.